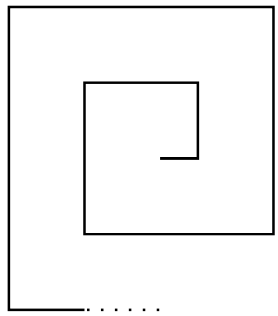
Gara Matematica

Dipartimento di Matematica Ulisse Dini
Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

25 Marzo 2013



Esercizio 1

Un punto si muove secondo la regola seguente: partendo da A si sposta di 1 cm in direzione Est, poi di 2 cm in direzione Nord, poi di 3 cm verso Ovest, 4 cm verso Sud, 5 cm verso Est e così di seguito in una traiettoria a spirale. Dopo aver percorso 2013 cm, a che distanza si trova dal punto iniziale A?

Soluzione Esercizio 1:
Si osserva innanzitutto che il punto percorre una spirale quadrata, i cui spigoli corrispondono ad ogni cambio di direzione del moto del punto.
Più precisamente, arrivato all'n-esimo spigolo il punto avrà percorso una distanza in cm pari a

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Poiché l'equazione

$$2013 = \frac{n(n+1)}{2}$$

non ammette soluzione per $n \in \mathbb{N}$, quando il punto percorre il 2013-esimo centimetro del suo moto si troverà su un lato della spirale e non su uno spigolo. Dal momento che

$$1953 = \frac{62(62+1)}{2} < 2013 < \frac{63(63+1)}{2} = 2016 ,$$

risulta evidente che al 2013-esimo centimetro il punto si trova sul lato della spirale che va dal 62-esimo al 63-esimo spigolo, esattamente $3\,cm$ prima del 63-esimo spigolo.
Si osserva ora che, nella numerazione qui adottata, gli spigoli che si trovano in direzione *sud-est* sono tutti e soli quelli la cui divisione per 4 ha resto 1; gli spigoli che si trovano in direzione *nord-est* sono invece tutti e soli quelli la cui divisione per 4 ha resto 2; per gli spigoli in direzione *nord-ovest* la divisione per 4 ha resto 3, e infine gli spigoli *sud-ovest* sono multipli di 4. Siccome $62 = 15 \cdot 4 + 2$ e $63 = 15 \cdot 4 + 3$, si ha che il punto, giunto al 2013-esimo centimetro del suo precorso, si trova sul 16-esimo lato *nord* della spirale, contato dall'origine verso l'esterno (per contare correttamente i lati occorre aggiungere 1 al quoziente della divisione per 4 dello spigolo del lato con numerazione piú bassa).
È facile vedere che ogni lato *nord* (ma anche *ovest*), rispetto al precedente è più lontano di $2\,cm$ dall'origine, per cui il punto al 2013-esimo centimetro del suo tragitto si trova a $32\,cm$ *nord* e $(32-3)\,cm$ *ovest*, ovvero ad una distanza dall'origine della spirale pari a

$$\sqrt{32^2 + 29^2}\,cm = \sqrt{1865}\,cm \sim 43.19\,cm .$$

Esercizio 2

Determinare il valore delle cifre **a**, **b** in modo che i tre numeri

$$34\mathbf{ab}7, \quad 33\mathbf{ab}, \quad \mathbf{ab}75$$

abbiano un fattore comune maggiore di 1.

Soluzione Esercizio 2:
Sia $s \geq 1$ un fattore comune ai tre numeri, che chiamiamo $A := 34ab7$, $B := 33ab$ e $C := ab75$. Dal momento che s divide A e B allora dovrà dividere anche $A - 10 \cdot B = 34ab7 - 3ab0 = 1007$. Infatti se $A = s \cdot q_1$ e $B = s \cdot q_2$ con $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ allora $A - 10 \cdot B = s \cdot q_1 - 10 \cdot s \cdot q_2 = s \cdot (q_1 - 10 \cdot q_2)$. Perciò, visto che $1007 = 19 \cdot 53$, s deve necessariamente essere uguale a 19 o 53 oppure 1007. Con un ragionamento analogo, risulta che s deve dividere $100 \cdot B - C = 33ab00 - ab75 = 329925$. Ora, dividendo 329925 per 19, 53 e 1007 si ottengono rispettivamente

$$\begin{aligned} 329925 &= 19 \cdot 17364 + 9, \\ 329925 &= 53 \cdot 6225, \\ 329925 &= 1007 \cdot 327 + 636. \end{aligned}$$

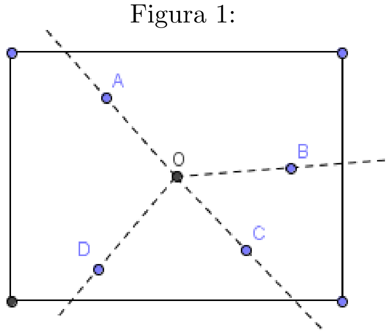
Dunque $s = 53$. Dato che 53 deve dividere B allora si ha $B = 53 \cdot q$ con $q \in \mathbb{N}$, ma $B = 3300 + ab = 62 \cdot 53 + 14 + ab$, quindi $ab = 53 \cdot (q - 62) - 14$. Essendo $10 \leq ab \leq 99$ (infatti a non può essere 0 perché è la prima cifra di C), le uniche possibilità sono che q sia 63 oppure 64; ne segue così che $a = 3$ e $b = 9$ oppure $a = 9$ e $b = 2$.

Esercizio 3

Dimostrare che comunque siano dati 4 punti in un rettangolo 3×4 ne possiamo sceglierne due la cui distanza è minore o uguale a 25/8.
Possiamo dividere il rettangolo in tre parti, ciascuna con diametro minore o uguale a 25/8?

Soluzione Esercizio 3:
Sia O il centro del rettangolo. Osserviamo intanto che se uno dei quattro punti A, B, C o D coincidesse con O, allora gli altri tre disterebbero da esso non più di 5/2 (lunghezza di mezza diagonale) e la tesi sarebbe in questo caso verificata.
Se nessuno dei quattro punti coincide con O, allora possiamo considerare le quattro semirette uscenti da O e passanti ognuna da uno dei nostri punti, come in Figura 1.

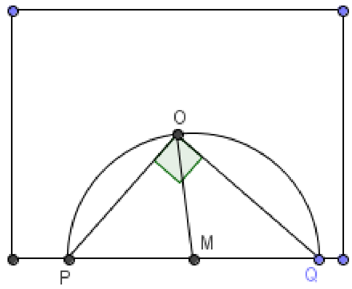
Figura 1:



Queste determinano quattro angoli e chiaramente almeno uno di essi è minore o uguale di un angolo retto. Dimostriamo adesso che due qualsiasi punti scelti all'interno di quell'angolo si trovano ad una distanza minore o uguale a 25/8. Ovviamente aumentando l'angolo aumentano le possibilità di scelta per i due punti e quindi possiamo supporre che l'angolo sia retto.
Si possono presentare 3 diversi casi:

<u>Caso 1</u>: L'intersezione tra le semirette definenti l'angolo e il rettangolo è un triangolo. Ricordiamo che il diametro di un triangolo rettangolo coincide con la lunghezza dell'ipotenusa, dunque basterà provare che l'ipotenusa ha lunghezza non superiore a 25/8.

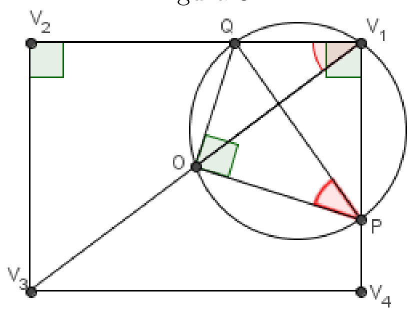
Figura 2:



Come in figura 2, indichiamo con P e Q i punti di intersezione tra le semirette e il rettangolo, e con M il loro punto medio. Il triangolo OPQ è rettangolo e quindi inscrivibile in una semicirconferenza di diametro $PQ = 2OM$. La lunghezza massima dell'ipotenusa si ha quindi quando OM è massimo, cioè quando Q (o P) coincide con un vertice del rettangolo. In questo caso è semplice osservare che $OQ = 5/2$ e che il triangolo OPQ è simile a metà rettangolo, quindi possiamo stabilire la proporzione $PQ : OQ = 5 : 4$, da cui ricaviamo $PQ = 25/8$. Dunque la lunghezza dell'ipotenusa non può mai essere maggiore di 25/8.

<u>Caso 2</u>: L'intersezione tra le semirette definenti l'angolo e il rettangolo è un quadrilatero. In tal caso il diametro corrisponde con la lunghezza del più lungo tra i lati e diagonali.

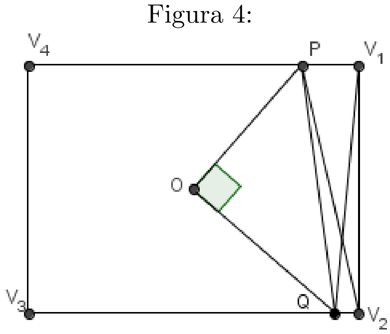
Figura 3:



Come in figura 3, indichiamo con P e Q i punti di intersezione tra le semirette e il rettangolo, e con V_1 il vertice del rettangolo contenuto nell'angolo. Notiamo subito che, per quel che riguarda i lati, si ha che: $OQ, OP \leq 5/2$ misura della semi-diagonale; $PV_1 \leq 3$, misura del lato; V_1V_4 e $QV_1 \leq 25/8$, lunghezza massima che si otterrebbe nel Caso 1; diagonale $OV_1 = 5/2$. Tutte queste misure sono allora non superiori a 25/8 e per concludere il trattamento di questo caso, basta provare che anche $PQ \leq 25/8$.
Il quadrilatero OPV_1Q ha due angoli opposti retti e quindi è inscrivibile in una circonferenza di diametro PQ. Ne segue che $\angle OPQ = \angle OV_1Q$ essendo angoli sottesi dalla stessa corda OQ; pertanto (come nel caso precedente) il triangolo OPQ è simile al triangolo $V_1V_2V_3$, e dunque PQ è 5/4 del maggiore tra OP e OQ. Siccome questi sono al più 5/2 (lunghezza di mezza diagonale), ricaviamo $PQ \leq 25/8$.

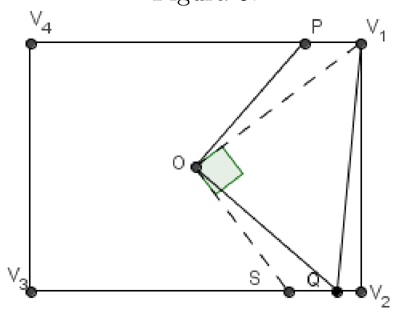
<u>Caso 3</u>: L'intersezione tra le semirette definenti l'angolo e il rettangolo è un pentagono. Anche in questo caso dovremo provare che tutti i lati e le diagonali hanno lunghezza non superiore a 25/8.

Figura 4:



Come in figura 4, indichiamo con P e Q i punti intersezione tra le semirette e il rettangolo, e con V_1 e V_2 i due vertici del rettangolo contenuti nell'angolo. Riguardo i lati sappiamo che: $V_1V_2 = 3 < 25/8$, $OP, OQ \leq 5/2 < 25/8$, $PV_1, QV_2 \leq 25/8$ e inoltre si ha che: $OV_1 = OV_2 = 5/2 < 25/8$. Resta allora da dimostrare che anche PV_2, QV_1, $PQ \leq 25/8$. Proviamo che o $PQ < PV_2$ oppure che $PQ < QV_1$, in modo da limitarci a stimare solo la lunghezza di PV_2 e QV_1 per provare la tesi. Infatti, se l'angolo $\angle PQV_2 \geq 90^o$, allora osservando il triangolo PQV_2 concluderemmo che $PQ < PV_2$, essendo PV_2 il lato opposto all'angolo più ampio. Se $\angle PQV_2 < 90^o$ allora $PQV_3 > 90^o$ e, trattandosi di angoli alterni interni, $QPV_1 > 90^o$. Osservando il triangolo QPV_1 concluderemmo allora che $PQ < QV_1$. Proviamo adesso che $QV_1 \leq 25/8$.

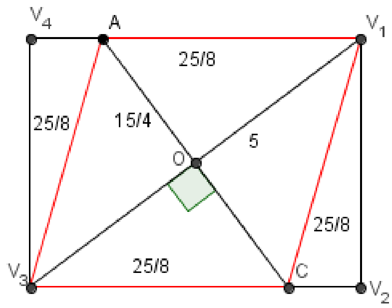
Figura 5:



Congiungiamo O con V_1 e consideriamo $OS \perp OV_1$. Come si osserva in Figura 5, QV_1 è contenuto nel quadrilatero OSV_2V_1, che, come provato nel Caso 2, ha diametro non superiore a $25/8$. Quindi $QV_1 \leq 25/8$. In maniera analoga si prova che $PV_2 \leq 25/8$, e ciò completa la dimostrazione.

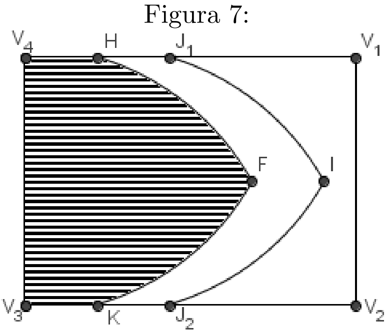
Osserviamo, anche se non richiesto nel problema, che il numero $25/8$ non può essere diminuito. Infatti esistono due diversi rombi con lati di lunghezza $25/8$ contenuti nel rettangolo e con la diagonale maggiore coincidente con una diagonale del rettangolo. Gli altri due vertici sono quelli di intersezione tra il perimetro del rettangolo e la perpendicolare alla diagonale, passante per O. In Figura 6 è raffigurato uno di questi due rombi (l'altro è simmetrico).

Figura 6:



Veniamo ora alla seconda domanda. Supponiamo per assurdo che esistano tre regioni con diametro minore o uguale di $25/8$ che coprano l'intero rettangolo. Dei quattro vertici, V_1, V_2, V_3 e V_4, del rettangolo, almeno due apparterranno alla stessa regione e chiaramente non possono che essere gli estremi di un lato corto del rettangolo, ad esempio V_3 e V_4. La regione che contiene V_3 e V_4 sarà contenuta nei due cerchi con centro in V_3 e V_4 e raggio $25/8$ e quindi nella loro intersezione, evidenziata in Figura 7.

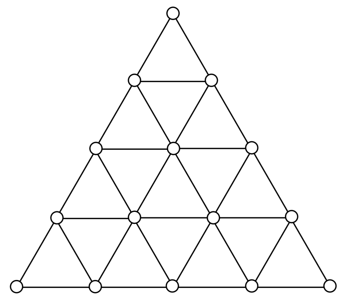
Figura 7:



Indichiamo con H e K i punti a distanza $25/8$ rispettivamente da V_3 e da V_4 che stanno sul perimetro del rettangolo. Tali punti non possono essere in due regioni distinte, infatti si ha che $HV_1 = KV_2 = 25/8$, dunque un qualsiasi punto del lato V_1V_2 si trova a distanza $\geq 25/8$ sia da V_1 che da V_2, quindi le tre regioni che otterremmo non conterrebbero tutti i punti del rettangolo. Allora H e K devono necessariamente far parte della stessa regione che deve essere contenuta nell'intersezione dei due cerchi con centro in H e K e raggio $25/8$. Tutto ciò che resta fuori deve essere contenuto nella terza regione. Calcolando però la lunghezza di J_1V_2 si ottiene che la distanza tra questi due punti è $15/4 > 25/8$. Abbiamo allora raggiunto un assurdo, dato che una regione con diametro $\leq 25/8$ non può contenere due punti con distanza superiore a $25/8$. *Quindi non è possibile dividere il rettangolo in tre parti di diametro minore o uguale a* $25/8$.

Esercizio 4

Un triangolo equilatero è diviso in $\mathbf{n^2}$ triangoli equilateri tutti uguali tra loro. Ogni triangolino corrisponde ad un interruttore che aziona tre lampade disposte sui vertici del triangolino. Quindi alcune lampade sono comandate da diversi interruttori. Tutti gli interruttori hanno tre posizioni e funzionano allo stesso modo: ad ogni pressione passano da una posizione alla successiva ciclicamente ($0 \to 1 \to 2 \to 0 \to 1 \to \ldots$), dove 0 indica lampada spenta, 1 accesa con bassa luminosità e 2 accesa con alta luminosità.
Se inizialmente ogni lampada è spenta, possiamo accenderle tutte alla stessa luminosità? La risposta dipende da $\mathbf{n}$?



Soluzione Esercizio 4:
Le lampadine possono essere accese tutte alla stessa luminosità (indifferentemente 1 *o* 2*) se e solo se* n *non è divisibile per* 3.
La prima cosa da osservare è che nel caso in cui sia possibile accendere tutte le lampadine a luminosità 1, ripetendo lo stesso procedimento una seconda volta, otteniamo una configurazione con tutte le lampadine accese a luminosità 2, e viceversa.
Notiamo anche che il numero totale di lampadine presenti nel triangolo è dato da

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Supponiamo ora che 3 divida n e che esista, per assurdo, una sequenza finita di M pressioni di pulsanti che renda possibile l'accensione di tutte le lampadine a luminosità 1; definiamo S_i come la somma dei valori di tutte le lampadine dopo che ho premuto esattamente i triangolini. Il nostro assurdo equivale a dire che

$$S_M = 1 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

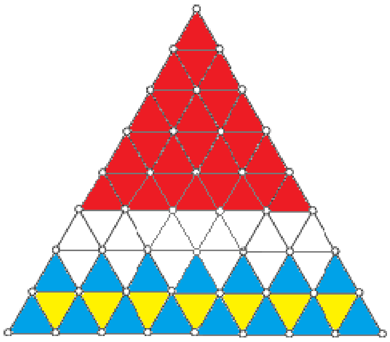
Poiché $S_0 = 0$ è divisibile per 3, e ogni volta che premo un triangolino aumento di $+1$ il valore di tre lampadine, si deve avere necessariamente che S_i è divisibile per 3 per ogni i. Ma allora è impossibile che S_M sia uguale alla quantità $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ perché, dato che 3 divide n, quest'ultima ha resto 1 nella divisione per 3.

Supponiamo adesso che 3 non divida n. Quindi n si potrà scrivere come $n = 3 \cdot k + 1$ oppure $n = 3 \cdot k + 2$ con k intero positivo.
Consideriamo, per esempio, il caso $n = 3 \cdot k + 2$ e dimostriamo che è possibile accendere tutte le lampadine a luminosità 1 (e quindi anche a luminosità 2, per quanto detto sopra) ragionando per induzione su k.
Se $k = 0$ allora $n = 2$, e il mio triangolo è formato da quattro triangolini. In questo caso per avere tutte le lampadine a luminosità 1 basta semplicemente premere una volta i tre triangolini esterni e due volte quello interno.
Per il passo induttivo, consideriamo un triangolo composto da n^2 triangolini, dove $n = 3 \cdot k + 2$. Possiamo pensare di suddividere tale triangolo in due parti come illustrato in figura 8: un triangolo equilatero (colorato in rosso) che ha

$$(3 \cdot k + 2) - 3 = 3 \cdot k - 3 + 2 = 3 \cdot (k-1) + 2$$

lampadine per lato, e la parte rimanente in basso, un trapezio isoscele costituito da 3 file orizzontali di triangolini.

Figura 8:



Per ipotesi induttiva, possiamo supporre di saper accendere a luminosità 1 tutte le lampadine del triangolo in rosso. Adesso, per portare anche le lampadine del trapezio isoscele a luminosità 1, basta premere ogni triangolo azzurro una volta e ogni triangolo giallo due volte.
Infatti, le lampadine di questo trapezio sono di quattro tipi:

1. quelle di confine fra il trapezio e il triangolo rosso che, per ipotesi induttiva, sono già accese a luminosità 1 e il cui stato non viene alterato;
2. quelle che sono al vertice di un unico triangolo azzurro, che quindi vanno allo stato 1;
3. quelle che sono al vertice di 2 triangoli azzurri e 1 giallo, che vanno allo stato $1 + 1 + 2$, cioè 1;
4. quelle che sono al vertice di 3 triangoli azzurri e 2 triangoli gialli, che vanno allo stato $1+1+1+2+2$, ovvero ancora 1.

Il caso $n = 3 \cdot k + 1$ si risolve in maniera del tutto analoga. Infatti l'unica differenza rispetto al caso $n = 3 \cdot k + 2$ sta nel fatto che adesso per $k = 0$ abbiamo $n = 1$, cioè un'unico triangolino, e quindi le sue lampadine ai vertici possono essere accese tutte a luminosità 1 semplicemente premendolo una volta.