Gara Matematica

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

14 Aprile 2014

Esercizio 1

Determinare tutti i polinomi $p(x)$ tali che, per ogni numero reale x, vale:

$$(x+2)p(x) - xp(x+1) = 0$$

Soluzione Esercizio 1

Per prima cosa, osserviamo che $x_0 = 0$ e $x_0 = -1$ sono radici del polinomio: infatti risulta che $2p(0) - 0 = 0$ ossia $p(0) = 0$, e $p(-1) + p(0) = 0$, ossia $p(-1) = 0$. Per il teorema di Ruffini, $p(x) = x(x+1)r(x)$, dove r è un polinomio; Sostituendo l'ultima uguaglianza nella relazione di partenza, otteniamo

$$0 = x(x+1)(x+2)r(x) - x(x+1)(x+2)r(x+1) = x(x+1)(x+2)(r(x) - r(x+1)).$$

Essendo tale espressione nulla per ogni valore di x reale, necessariamente segue che $r(x) - r(x+1) = 0$, ossia $r(x) = r(x+1)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo $r(x)$ un polinomio, questo implica che $r(x) = c$, dove c è una costante reale; questo comporta che $p(x) = cx(x+1)$, con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Matteo aveva un'ottima calcolatrice fino a quando non si è guastato il display. Adesso sono visibili soltanto le ultime sei cifre, cioè le meno significative, dei numeri visualizzati (per il resto la calcolatrice funziona perfettamente e non sbaglia un conto). Un giorno, per burlare un suo amico appassionato di matematica, scrive un numero di sei cifre sulla sua calcolatrice e chiede all'amico di calcolarne il quadrato. L'amico preme il tasto opportuno, ma non vede nessun cambiamento sul visore. Quale cifra non ha sicuramente digitato Matteo?

Soluzione Esercizio 2

Se x è il numero di sei cifre digitato, allora deve soddisfare:

$$x^2 \equiv x \bmod 10^6$$

ovvero $x(x-1) \equiv 0 \bmod 2^6 \cdot 5^6$. Osserviamo che x e $x-1$ sono primi tra loro, ovvero non hanno fattori in comune; ci sono pertanto 4 possibilità (k, $m \in \mathbb{N}$):

1^o caso

$$\begin{cases} x &= 10^6 k \\ x-1 &= m \end{cases}$$

In questo caso o $x = 0$ o x ha almeno 7 cifre. In ogni caso non otteniamo alcun valore accettabile di x.

2^o caso

$$\begin{cases} x-1 &= 10^6 k \\ x &= m \end{cases}$$

Valgono le stesse considerazioni del caso precedente.

3^o caso

$$\begin{cases} x-1 &= 5^6 k \\ x &= 2^6 m \end{cases}$$

Cerchiamo k e m tali che $2^6 m = 5^6 k + 1$, ovvero tali che $5^6 k \equiv -1 \bmod 64$.
Essendo $5^6 = 15625 \equiv 9 \bmod 64$, $5^6 k \equiv 9k \bmod 64$ e l'equazione si riduce a

$$9k \equiv -1 \bmod 64 \equiv 63 \bmod 64$$

che è soddisfatta da $k \equiv 7 \bmod 64$. Se $k = 7$, otteniamo $x - 1 = 109375$, per k maggiori si ottiene un numero con più di sei cifre. Per cui $x = 109376$.

4^o caso

$$\begin{cases} x &= 5^6 k \\ x-1 &= 2^6 m \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo a prima, cerchiamo k, m numeri naturali tali che $5^6 k = 2^6 m + 1$, ossia $5^6 k \equiv 1 \bmod 64$. Di nuovo, l'equazione è equivalente a $9k \equiv 1 \bmod 64$. Dato che $9 \cdot 7 \equiv -1 \bmod 64$, $9 \cdot 57 \equiv 9 \cdot -7 \bmod 64 \equiv 1 \bmod 64$, per cui $k \equiv 57 \bmod 64$. Per $k = 57$, $x = 890625$; per gli altri k si ottengono numeri a più di 6 cifre.

Riepilogando, abbiamo due valori di x: $\mathbf{x = 109376}$ e $\mathbf{x = 890625}$, per cui l'unica cifra che non compare è il **4**.

Esercizio 3

Si considerino due sfere concentriche di raggi rispettivamente 1 e r, con $r > 1$. Per quali valori di r è possibile scegliere tre punti A, B e C sulla superficie della sfera più grande in modo che tutti i lati del triangolo ABC siano tangenti alla sfera più piccola?

Soluzione Esercizio 3

Supponiamo che tale triangolo sia costruibile: chiamamo con Σ la sfera esterna di raggio r, con σ quella interna di raggio 1 e con O il centro comune alle due sfere. Il cerchio inscritto e circoscritto al triangolo ABC sono le intersezioni del piano π contenente il triangolo ABC con σ e Σ rispettivamente e il loro centro O' comune è dato dal piede della perpendicolare condotta da O al piano π. Inoltre O' è sia incentro che circocentro del triangolo ABC, da cui ne segue che ABC è un triangolo equilatero, e O' è anche baricentro di tale triangolo. Questo ulteriormente implica che il raggio del cerchio circoscritto vale $2r_1$, ossia il doppio del raggio r_1 del cerchio inscritto. Sia $OO' = h$; applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli $OO'A$ e $OO'H$, dove H è il piede dell'altezza del triangolo ABC condotta da A, segue che

$$r^2 = h^2 + (2r_1)^2$$
$$1 = h^2 + (r_1)^2$$

Questo implica che $4 - r^2 = 3h^2 \geq 0$, ossia $r \leq 2$. Viceversa, suppongo $1 \leq r \leq 2$. Se consideriamo un piano alla distanza $h = \sqrt{\frac{4-r^2}{3}}$ dal centro O, esso taglia le supefici sferiche in due cerchi di raggi:

$$r_1 = \sqrt{\frac{r^2-1}{3}}$$

$$r_2 = 2\sqrt{\frac{r^2-1}{3}}$$

Esercizio 4

1. Sia ABC un triangolo con la seguente proprietà: esiste un punto P complanare al triangolo tale che i triangoli PAB, PBC e PCA sono isoperimetrici e equivalenti. Come è fatto il triangolo ABC? Dove si trova il punto P?

2. Sia ABCD un quadrilatero piano con la seguente proprietà: esiste un punto P sul piano del quadrilatero tale che i triangoli PAB, PBC, PCD e PDA sono isoperimetrici e equivalenti. Come è fatto il quadrilatero ABCD? Dove si trova il punto P?

Soluzione Esercizio 4

Cominciamo con tre risultati preliminari.

Lemma 1 *Dati i punti A, B e C nel piano π, l'insieme dei punti P di π tali che i triangoli PAB e PAC sono equivalenti è formato*

(a) dall'intero piano se A, B e C sono allineati e $AB = AC$;

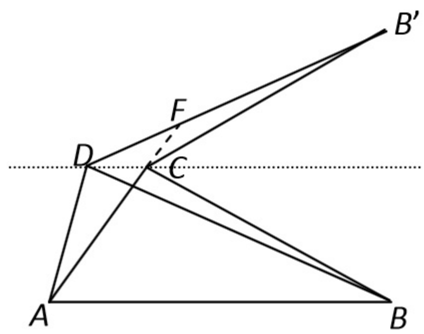
(b) dalla retta contenente A, B e C se A, B e C sono allineati e $AB \neq AC$;

(c) dalle due rette per A una parallela a BC e l'altra passante per il punto medio di BC se A, B e C non sono allineati.

Dimostrazione Indichiamo con $d(P, AB)$ la distanza del punto P dalla retta contenente A e B. I due triangoli sono equivalenti se

$$AB \cdot d(P, AB) = AC \cdot d(P, AC).$$

Se A, B e C sono allineati allora $d(P, AB) = d(P, AC)$ per ogni P. Se inoltre $AB = AC$ allora i triangoli sono sempre equivalenti comunque si scelga P (caso (a)). Se invece $AB \neq AC$ allora sono equivalenti soltanto se $d(P, AB) = d(P, AB) = 0$ (caso (b)). Se A, B e C non sono allineati allora i due triangoli sono equivalenti se e solo se B e C hanno la stessa distanza da PA. Pertanto o PA non separa B e C ed è parallelo a BC oppure PA (o il suo prolungamento) passa per il punto medio di BC. Quindi le soluzioni sono le due rette descritte nell'enunciato del lemma al caso (c).



Lemma 2 *In un trapezio $ABCD$ i due triangoli determinati rispettivamente dalla base AB e da uno degli altri vertici sono isoperimetrici se e solo se il trapezio è isoscele.*

Dimostrazione. La tesi è conseguenza del fatto che il perimetro del triangolo ABC, al muoversi di C su una retta parallela ad AB, cresce (strettamente) al crescere della distanza di C dall'asse di AB. Per dimostrare questa affermazione consideriamo due punti distinti C e D dalla stessa parte dell'asse di AB ed alla stessa distanza da AB, come in figura. Vogliamo dimostrare che $AD + DB > AC + CB$ essendo D più distante di C dall'asse di AB. Se C e D fossero più a sinistra di A questo sarebbe immediato. Se invece, come in figura, $AC > AD$, allora consideriamo il punto B' simmetrico di B rispetto alla retta CD ed il punto F intersezione di DB' con il prolungamento di AC. Il perimetro di ADB' è maggiore del perimetro di AFB' che è maggiore del perimetro di ACB'. Quindi $AD + DB$ è maggiore di $AC + CB$.

Lemma 3 *Dati i punti A, B e C nel piano π, l'insieme dei punti P di π tali che i triangoli PAB e PAC sono equivalenti e isoperimetrici è formato:*

(a) dall'intero piano se $B = C$;

(b) dalla semiretta dei punti P tali che PA contiene BC se A, B e C sono allineati, $B \in C$ e $A \notin BC$;

(c) dal punto simmetrico di A rispetto all'asse di BC se A, B e C sono allineati, $A \in BC$ e $AB \neq AC$;

(d) dall'intero asse di BC se $AB = AC$ e $B \neq C$;

(e) da due punti, il simmetrico di A rispetto all'asse di BC e il simmetrico di A rispetto al punto medio di BC, se A, B e C non sono allineati e $AB \neq AC$.

Dimostrazione. Partiamo dalla casistica del Lemma 1 e specifichiamo ancora sulla base della proprietà aggiuntiva sui perimetri. Se A, B e C sono allineati e $AB = AC$ allora abbiamo due casi: o $B = C$ e P continua a poter essere scelto ovunque (caso (a)), oppure P deve limitarsi ai punti dell'asse di BC (caso particolare di (d)). Se A, B e C sono allineati e $AB \neq AC$ allora dobbiamo distinguere il caso in cui A è interno al segmento BC da quello in cui è esterno. Nel primo caso P non può essere esterno a BC ed anzi, se supponiamo $AB < AC$, dovrà essere quell'unico punto di AC tale che $BP = AC$ (caso (c)). Nel secondo caso è sufficiente chiedere che PA contenga sia B che C (caso (b)). Se A, B e C non sono allineati allora analizziamo prima i punti sulla retta parallela a BC passante per A. Comunque si scelga un punto $P \neq A$ su tale retta, il quadrilatero convesso con vertici in $PABC$ è un trapezio. Per il Lemma 2, i triangoli PAB e PAC hanno lo stesso perimetro se e solo se P è il simmetrico di A rispetto all'asse di BC. Così troviamo un nuovo punto se $AB \neq AC$ (un punto del caso (e)) ed A stesso se $AB = AC$. Consideriamo poi un punto P sulla retta per A e per il punto medio di BC. Indichiamo con C' il simmetrico di C rispetto alla retta PA. Anche in questo caso il quadrilatero convesso con vertici in $PABC'$ è un trapezio (eventualmente degenere se $B = C'$, cioè se $AB = AC$) e per il Lemma 2 troviamo un unico P che soddisfa la proprietà richiesta (secondo punto del caso (e)). Se $AB = AC$ allora ogni punto della retta è accettabile (caso (d)).

Triangoli Consideriamo i tre luoghi geometrici definiti come insiemi di punti che determinano con due lati consecutivi del triangolo ABC due triangoli equivalenti e isoperimetrici ed indichiamoli con L_A, L_B e L_C, dove il vertice in evidenza è il vertice in comune ai due lati della definizione. Le ipotesi del problema garantiscono l'esistenza di un punto P contenuto nell'intersezione di tali luoghi geometrici. Da questo fatto vogliamo ricavare informazioni sul triangolo e sulla posizione di P. Supponiamo dapprima che il triangolo sia degenere, cioè che due vertici coincidano (caso **A**) oppure che abbia tre vertici distinti e sia contenuto in una retta (caso **B**).

Caso A Supponiamo $A = B$. In questo caso coincidono ovviamente L_A e L_B mentre L_C comprende tutto il piano. Dal Lemma 3 deduciamo allora che P può essere scelto

(a) dall'intero piano se $A = C$;

(b) dalla semiretta dei punti X tali che XA contiene AC se $A \neq C$.

Caso B Supponiamo adesso che ABC sia contenuto in una retta, ma che i tre vertici siano distinti. Il più piccolo segmento contenete ABC avrà per estremi due vertici diversi che chiamiamo X e Y. Allora, per il Lemma 3, L_X e L_Y sono due semirette ed è facile accertarsi che non hanno punti in comune, dato che i punti di una devono lasciare almeno due vertici "a destra" mentre i punti dell'altra devono lasciare almeno due vertici "a sinistra". Assurdo. Supponiamo adesso che il triangolo ABC non sia degenere. Il Lemma 3 garantisce che i tre luoghi geometrici L_A, L_B e L_C in questo caso sono costituiti da due singoli punti esterni al triangolo oppure dall'asse di un lato del triangolo. Distinguiamo due casi a seconda che almeno uno di questi luoghi sia una retta (caso C_1) oppure no (caso C_2).

Caso C_1 Supponiamo che L_A sia l'asse di BC e quindi che $AB = AC$. Se il triangolo non è equilatero allora L_B e L_C sono costituiti da due punti ciascuno, e gli unici che possono appartenere a L_A sono il simmetrico di B rispetto all'asse di AC e il simmetrico di C rispetto all'asse di AB. Affinché esista, P deve essere il simmetrico di B rispetto all'asse di AC e il simmetrico di C rispetto all'asse di AB. Quindi il quadrilatero $ABPC$ è un parallelogramma con tutti i lati uguali ($AB = AC$) e con gli angoli retti (l'asse di AB è anche asse di PC), cioè un quadrato. Se invece ABC è equilatero, allora P deve essere il punto d'intersezione degli assi dei tre lati, cioè è il centro del triangolo equilatero.

Caso C_2 Supponiamo che ognuno dei luoghi L_A, L_B e L_C sia una coppia di punti. Il punto P può essere al più il simmetrico di un vertice rispetto al punto medio del lato opposto e quindi è sicuramente il simmetrico di due vertici rispetto all'asse del lato opposto. Assumiamo quindi che P sia il simmetrico di C rispetto all'asse di AB e il simmetrico di B rispetto all'asse di AC. Quindi il quadrilatero $ABPC$ è un parallelogramma con gli assi dei lati opposti coincidenti. Quindi è un rettangolo. In questo caso si osserva che P è il simmetrico di A rispetto al punto medio di BC e quindi la proprietà richiesta è verificata.

In conclusione, se ammettiamo soltanto triangoli non degeneri, allora abbiamo due possibilità: o il triangolo ABC è **equilatero e P è il suo centro**, oppure ABC è **rettangolo e P lo completa in un rettangolo**.

Quadrilateri Consideriamo i quattro luoghi geometrici definiti come insiemi di punti che determinano con due lati consecutivi del quadrilatero $ABCD$ due triangoli equivalenti e isoperimetrici ed indichiamoli con L_A, L_B, L_C e L_D, dove il vertice in evidenza è il vertice in comune ai due lati della definizione. Le ipotesi del problema garantiscono l'esistenza di un punto P contenuto nell'intersezione di tali luoghi geometrici. Da questo fatto vogliamo ricavare informazioni sul quadrilatero e sulla posizione di P. Supponiamo dapprima che il quadrilatero $ABCD$ sia degenere, cioè che due vertici coincidano (casi A_1 e A_2) oppure che abbia quattro vertici distinti e sia contenuto in una retta (caso B).

Caso A_1 Supponiamo $A = B$. In questo caso il triangolo PAB ha area nulla e quindi anche PBC e PAD devono essere degeneri, cioè C e D devono essere allineati con A e con P. I triangoli PAB e PBC sono isoperimetrici se e solo se C è contenuto in PB. Analogamente D è contenuto in PA. Quindi C e D devono stare dalla stessa parte di A e P può essere qualunque punto tale che PA contiene CD.

Caso A_2 Supponiamo $B = D$. In questo caso coincidono ovviamente L_B e L_D mentre L_A e L_C comprendono tutto il piano. Per il Lemma 3 avremo allora che P può essere

(a) qualunque punto del piano se $A = C$;
(b) qualunque punto tale che PB contiene AC se A, B e C sono allineati e $B \notin AC$;
(c) il punto simmetrico di B rispetto all'asse di AC se A, B e C sono allineati, $B \in AC$ e $AB \neq BC$;
(d) qualunque punto dell'asse di AC se $AB = BC$ e $A \neq C$;
(e) o il simmetrico di B rispetto all'asse di AC o il simmetrico di B rispetto al punto medio di AC, se A, B e C non sono allineati e $AB \neq BC$.

Caso B Supponiamo adesso che $ABCD$ sia contenuto in una retta, ma che i quattro vertici siano distinti. Il più piccolo segmento contenete il quadrilatero avrà per estremi due vertici diversi che chiamiamo X e Y. Allora, per il Lemma 3, L_X e L_Y sono due semirette ed è facile accertarsi che non hanno punti in comune, dato che i punti di una devono lasciare almeno tre vertici "a destr" mentre i punti dell'altra devono lasciare almeno tre vertici "a sinistra". Assurdo.

Supponiamo adesso che il quadrilatero $ABCD$ non sia degenere. Il Lemma 3 garantisce che i quattro luoghi geometrici L_A, L_B, L_C e L_D in questo caso sono costituiti da due singoli punti oppure dall'asse di una diagonale del quadrilatero. Distinguiamo due casi a seconda che almeno uno di questi luoghi sia una retta (caso C_1) oppure no (caso C_2).

Caso C_1 Supponiamo che L_A sia l'asse di BD. Se C non appartiene a L_A, allora L_C e L_A non possono avere punti in comune: assurdo. Pertanto C e P appartengono all'asse di BD. Dalla equivalenza dei triangoli PAB e PCB ricaviamo $PA = PC$. Dall'uguaglianza dei perimetri di PAB e PCB ricaviamo invece $BA = BC$. Quindi B appartiene all'asse di AC e L_B è un retta e deve, per quanto appena visto, coincidere con L_D. Dunque le diagonali AC e BD si dimezzano ortogonalmente e il quadrilatero $ABCD$ è un rombo con P al centro.

Caso C_2 Supponiamo che ognuno dei luoghi L_A, L_B, L_C e L_D sia una coppia di punti. Consideriamo L_A e L_C : affinché P stia nella loro intersezione dovrà essere il simmetrico di A e di C rispetto a simmetrie diverse (A e C non possono coincidere). Dunque possiamo supporre che A sia il simmetrico di P rispetto al punto medio di BD e C sia il simmetrico di P rispetto all'asse di BD. Quindi A e C sono simmetrici rispetto al segmento BD ed in particolare $AD = CD$. Siccome i triangoli PAD e PCD sono isoperimetrici, otteniamo che P si trova sull'asse di AC: assurdo.

In conclusione, se ammettiamo soltanto quadrilateri non degeneri, allora l'unica possibilità è che il quadrilatero sia **un rombo e che P sia il suo centro**.