Gara Matematica

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

30 Marzo 2015

Esercizio 1

Un orologio a muro meccanico (a 12 ore) ha le lancette delle ore e dei minuti che si muovono continuamente. Trascorsi k minuti dopo mezzogiorno (ma prima della mezzanotte), la lancetta delle ore e quella dei minuti formano un angolo di 45^o. Quali sono i possibili valori interi di k?

Soluzione Esercizio 1

Poiché 12 ore corrispondono a 720 minuti, $0 \leq k \leq 720$; dopo k minuti da mezzogiorno, la lancetta dei minuti si è spostata di $\frac{360}{60}k = 6k$ gradi, mentre la lancetta delle ore di $\frac{360}{720}k = \frac{k}{2}$ gradi. L'angolo tra le lancette misura, pertanto, $6k - \frac{k}{2} = \frac{11}{2}k$. Per le richieste del problema, esiste $l \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{11}{2}k = \pm 45^o + 360^o l,$$

ossia $11k = \pm 90^o + 720l = 90^o(\pm 1 + 8l)$.
Dato che 11 non divide 90, 11 dividerà $8l \pm 1$. Dato che $1 \leq k \leq 720$, $1 \leq l \leq 11$. Le uniche due possibilità sono:

1. $l = 4$ **e segno** $+$, per cui $k = \frac{90 \cdot 33}{11} = 270$. In questo caso l'orologio segna le $16 : 30$.
2. $l = 7$ **e segno** $-$, per cui $k = \frac{90 \cdot 55}{11} = 450$. In questo caso l'orologio segna le $19 : 30$.

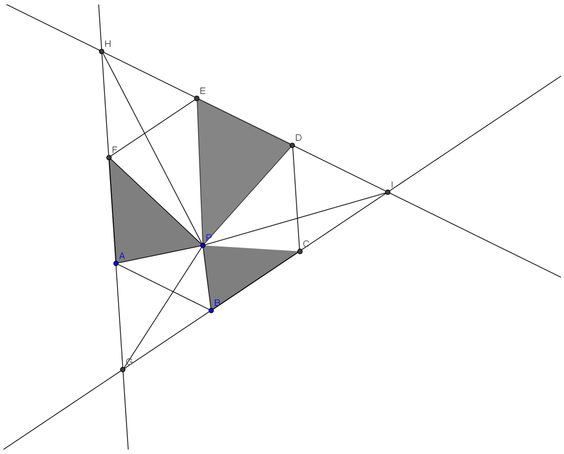
Esercizio 2

Consideriamo un punto interno P a un esagono regolare. Collegando P a ciascun vertice del poligono, otteniamo sei triangoli. Coloriamo alternativamente tali triangoli di bianco e di nero, in modo che due triangoli adiacenti abbiano colore diverso.

1. Provare che la somma delle aree di tutti i triangoli bianchi è uguale alla somma delle aree di tutti i triangoli neri.
2. La stessa proprietà vale per un poligono regolare di $2n$ lati?

Soluzione Esercizio 2

1. Consideriamo il triangolo equilatero prolungando i lati dell' esagono che appartengono ai triangoli neri. Congiungiamo il punto scelto P scelto con i vertici del triangolo. L'altezza di ogni triangolo nero coincide con l'altezza disegnata nel corrispondente triangolo di GHI, mentre il rapporto delle basi corrispondenti vale $\frac{1}{3}$, che non è altro che il rapporto tra la lunghezza del lato dell' esagono e quella del triangolo. L'area totale dei triangoli neri è pertanto $\frac{1}{3}A$, dove A è l'area di GHI. Analogamente si prova che l'area totale dei triangoli bianchi è $3A$ e quindi l'uguaglianza tra la somma delle due aree è verificata.



2. Proviamo banalmente che la proprietà vale per ogni n. Se $n = 2$, il poligono è un quadrato e la tesi segue dato che le basi dei triangoli bianchi sono lati opposti del quadrato e le loro altezze giacciono sulla stessa retta, e pertando la somma delle aree dei due triangoli è la metà dell'area del quadrato. Assumiamo che $n > 2$. Come nel punto precedente, consideriamo il poligono di n lati ottenuti prolungando i lati dell' $2n$-gono che appartengono ai triangoli bianchi. Congiungiamo il punto scelto P scelto con i vertici dell'n-gono. L'altezza di ogni triangolo nero coincide con l'altezza disegnata nel corrispondente triangolo dell'n-gono, mentre il rapporto delle basi corrispondenti uguaglia il rapporto c della lunghezza del lato del $2n$-agono e quella dell' n-agono. L'area totale dei triangoli bianchi è pertanto cA_n, dove A_n è l'area del poligono di n vertici. Analogamente si prova che l'area dei triangoli neri è cA_n e quindi l'uguaglianza tra la somma delle due aree è verificata.

Esercizio 3

(a) Sia A_n il numero ottenuto scrivendo consecutivamente le cifre di $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$ (ad esempio $A_4 = 24816$). Dimostrare che per ogni $n > 0$, 2^n divide A_n.

(b) Sia B_n il numero ottenuto scrivendo consecutivamente le cifre di $b^1, b^2, \ldots, b^n$ con b intero positivo. Determinare tutti i valori di b per cui b^n divide B_n per ogni $n > 0$.

Soluzione esercizio 3

Parte 1

Osserviamo che $A_{n+1} = A_n \cdot 10^k + 2^{n+1}$ dove k è il numero di cifre di 2^{n+1} ovvero $k = 1 + \lfloor \log_{10} 2^{n+1} \rfloor = 1 + \lfloor (n+1) \log_{10} 2 \rfloor \geq 1$.
Procediamo per induzione. Per $n = 1$, banalmente, $2 | A_1 = 2$. Supponiamo ora che $2^n \mid A_n$ e dimostriamo che $2^{n+1} \mid A_{n+1}$ ovvero che $A_n = 2^n \cdot M_n$ con M_n intero:

$$A_{n+1} = A_n \cdot 10^k + 2^{n+1} = 2^n \cdot M_n \cdot 2^k \cdot 5^k = 2^{n+1}(M_n \cdot 2^{k-1} \cdot 5^k).$$

Poiché $k \geq 1$ la quantità tra parentesi è intera e $2^{n+1} \mid A_{n+1}$.

Parte 2

passo 1: condizione necessaria perchè per b valga la proprietà è che b sia un divisore di una potenza di 10

Qualunque sia b si ha che $b \mid B_1 = b$. Poichè $B_2 = 10^k \cdot b + b^2$ dove k è il numero di cifre di b^2. Quindi $b^2 \mid B_2$ se e solo se $b^2 \mid 10^k \cdot b$ ovvero se e solo se $b \mid 10^k$.
Quindi condizione necessaria perchè la proprietà sia soddisfatta da b è che b sia della forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$ per qualche $\alpha, \beta \geq 0$.

passo 2: se b soddisfa la proprietà allora anche $10^a \cdot b$ la soddisfa

Supponiamo che b soddisfi la proprietà e sia $c = 10b$. Banalmente $c \,|\, C_1 = c$. Supponiamo che $c^n = 10^n \cdot b^n \,|\, C_n$. Se k è il numero di cifre decimali di b^{n+1} allora il numero di cifre decimali di $c_{n+1} = 10^{n+1} \cdot b^{n+1}$ è $k + n + 1$. Si ha:

$$C_{n+1} = 10^m \cdot C_n + c^{n+1} = 10^{k+n+1} \cdot C_n + 10^{n+1} b^{n+1} = 10^{n+1}(10^k \cdot C_n + b^{n+1})$$

Quindi $c^{n+1} \,|\, C_{n+1}$ se e solo se $b^{n+1} \,|\, 10^k \cdot C_n + b^{n+1}$ cioè se e solo se $b^{n+1} \,|\, 10^k \cdot C_n$. Per ipotesi induttiva $10^k \cdot C_n = 10^{n+k} \cdot b^n M_n$ con M_n intero, quindi la proprietà è soddisfatta se e solo se $b \,|\, 10^{n+k}$ ma quest'ultima è vera poiché, per il passo 1, se b soddisfa la proprietà allora $b \,|\, 10^k$.

Resta quindi da stabilire il comportamento rispetto alla proprietà delle potenze di 2 e delle potenze di 5.

passo 3: se 2^α non soddisfa la proprietà anche $2^{\alpha+1}$ non la soddisfa

Indichiamo con k_α il numero di cifre decimali di $2^{2\alpha}$. Poiché $2^{2(\alpha+1)} = 4 \cdot 2^\alpha < 10 \cdot 2^\alpha$ si ha $k_{\alpha+1} \leq k_\alpha + 1$. Fissato $n = 2$, sappiamo che $b^2 \,|\, B_2$ se e solo se $b \,|\, 10^k$ dove k è il numero di cifre decimali di b^2.
Se 2^α non soddisfa la proprietà allora $2^\alpha \not| 10^{k_\alpha}$ ovvero $\alpha < k_\alpha$. Poiché $k_{\alpha+1} \leq k_\alpha + 1 < \alpha + 1$ si ha che $2^{\alpha+1} \not| 10^{k_{\alpha+1}}$ ovvero che $2^{\alpha+1}$ non soddisfa la proprietà.

passo 5: 5^α soddisfa la proprietà per ogni $\alpha > 0$

Se $\alpha = 1$: procediamo per induzione su n. Banalmente $b = 5 \,|\, B_1 = 5$. Supponiamo che $b^n \,|\, B_n$ ovvero che esista un intero H_n tale che $B_n = b^n \cdot H_n$. Sia k_n il numero di cifre decimali di b^n; allora $B_{n+1} = B_n \dot{1}0^{k_{n+1}} + b^{n+1}$. Si ha:

$$b^{n+1} \,|\, B_{n+1} \iff b^{n+1} \,|\, 10^{k_{n+1}} \cdot b^n \cdot H_n \iff b \,|\, 10^{k_{n+1}} \cdot H_n$$

Poiché $k_{n+1} \geq 1$ $b = 5 \,|\, 10^{k_{n+1}}$ e l'ipotesi induttiva è verificata. Quindi $b = 5$ soddisfa la proprietà.

Se $\alpha = 2$: procedendo analogamente al caso $\alpha = 1$, ma con $b = 25$, si tratta di dimostrare che $b \,|\, 10^{k_{n+1}} \cdot H_n$ dove ora k_n è il numero di cigre decimali di 25^n. Poiché $k_n \geq k_1 = 2$ abbiamo che $10^{k_{n+1}} \geq 100 = 2^2 \cdot 5^2$ ovvero segue la tesi. La proprietà è verificata anche da $b = 25$.

Se $\alpha > 2$: procediamo per induzione su α. Visti i due casi precedenti resta da dimostrare solo il passo induttivo. Supponiamo che la proprietà sia verificata per $b = 5^\alpha$, dimostriamo che è verificata anche per $c = 5^{\alpha+1}$. Per fare questo procederemo per induzione su n: $c \,|\, C_1$ banalmente. Supponiamo che $c^n \,|\, C_n$ ovvero che esista L_n tale che $C_n = c^n \cdot L_n$. Indichiamo poi con p_n il numero di cifre decimali di $c^n = 5^{n\alpha}$. Con lo stesso ragionamento utilizzato in precedenza $c^{n+1} \,|\, C_{n+1}$ se e solo se $c = 5^\alpha \,|\, 10^{p_{n+1}} \cdot L_n$. Perché quest'ultima affermazione sia vera è sufficiente che

$$\alpha + 1 \leq p_{n+1}$$

ovvero che la potenza di 10 contenga una potenza di 5 sufficientemente grande.
Osserviamo che, se $\alpha \geq 2$

$$5^{(n+1)\alpha} = 5^\alpha \cdot 5^{n\alpha} \geq 25 \cdot 5^{n\alpha} > 10 \cdot 5^{n\alpha}$$

Quindi se q_n è il numero di cifre decimali di b^n si ha $p_n \geq q_n + 1$ ovvero, per ricorsione, $p_n \geq (\alpha - 1) +$ numero di cifre decimali di $25 = \alpha + 1$. La condizione è soddisfatta ovvero tutte le potenze di 5 verificano la proprietà.

Conclusione

Resta da stabilire quale sia la prima potenza di 2 che non soddisfa la proprietà.
$b = 4$ **soddisfa la proprietà**: la dimostrazione è del tutto analoga quella vista in precedenza per $b = 5$.
$b = 8$ **non soddisfa la proprietà** infatti $b^2 = 64 \not| 864 = B_2$.
Quindi i valori di b per cui la proprietà è soddisfatta sono esattamente quelli della forma

$$2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 10^\gamma \quad \text{dove } \alpha = 0, 1, 2 \text{ e } \beta, \gamma \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 4

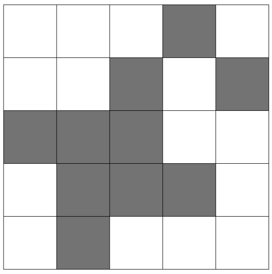
Coloriamo ogni quadratino unitario di una griglia $n \times n$ di bianco o di nero, in modo tale che tra tutti i quadrati 2×2 contenuti nella griglia siano rappresentate tutte le possibili colorazioni di quadrati 2×2 con questi due colori (colorazioni ottenute da un'altra tramite riflessione e rotazione sono differenti).

1. Determina il minimo numero n per cui questo è possibile.

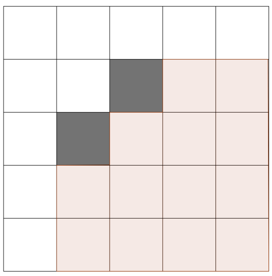
2. Per tale n determina il numero minimo m di quadretti neri.

Soluzione Esercizio 4

1. Ci sono $2^4 = 16$ possibilità di colorare i sottoquadrati 2×2 con due colori e una griglia $n \times n$ contiene $(n-1)^2$ tali sottoquadrati , pertanto $(n-1)^2 \geq 16$, ossia $n - 1 \geq 4$, ossia $n \geq 5$. Il valore $n = 5$ è effettivamente quello minimo come mostra il disegno.



2. Nella colorazione fornita ci sono 10 quadretti neri, pertanto $m \leq 10$. Proviamo che $m = 10$. Nella griglia considerata ci sono 4 quadrati ai vertici , 12 quadrati ai lati che non sono vertici e 9 quadrati interni. Ogni quadrato all'angolo è contenuto in un'unica griglia 2×2 , ogni quadrato ai lati in esattamente 2 sottogriglie e ogni quadrato interno in quattro. Tutte le 16 colorazioni contengono un totale di 64 quadratini, di cui 32 neri. Se una griglia 5×5 contiene m quadratini neri, di cui a ai vertici, b ai lati e c interni, vale che $m = a + b + c$ e $a + 2b + 4c = 32$. Chiaramente $c \leq 8$, altrimenti l'ultima equazione non sarebbe verificata. Se $c = 8$, $a = 0 = b$; se $c = 7$, l'unico modo per aver $m < 10$ è $a = 0$ e $b = 2$. Se $c \leq 6$, allora $m \geq 10$ sempre. Per provare che $m = 10$, basta verificare che non esistono colorazioni con $a = 0$ e $b \leq 2$. In questo caso, la griglia contiene almeno due lati senza quadratini neri, supponiamo ad esempio che uno di essi sia quello superiore. Dato che tra tutte le 16 colorazioni di sottogriglie 2×2 ce ne sono 4 dove entrambi i quadrati superiori sono bianchi e le due righe superiori della griglia contengono esattamente 4 sottogriglie, tutte le quattro colorazioni con i quadratini superiori sono collocate nelle prime due righe, in particolare quella con tutti i quadrati bianchi. Dato che la stessa cosa vale per l'altro lato che non contiene quadratini neri, i due lati devono essere adiacenti e la sottogriglia tutta bianca deve trovarsi nell'angolo in cui i due lati si incontrano. Supponiamo per comodità sia l'angolo in alto a sinistra. Allora i due quadratini indicati in figura



devono essere neri , perché altrimenti ci sarebbero più sottogriglie tutte bianche. In questo modo, però, ci sarebbero due quadrati 2×2 con un quadratino nero in basso a destra e gli altri quadratini tutti bianchi, che contraddice la nostra richiesta. Pertanto $m = 10$.