Esercizio 1
In una scacchiera 8x8 il re si trova inizialmente in una delle quattro caselle centrali. In quanti modi diversi, dopo 4 mosse, il re si troverà in una casella dello stesso colore di quella iniziale? (Ricordiamo che, nel gioco degli scacchi, ad ogni mossa il re si può muovere soltanto in una delle caselle confinanti a quella dove si trova per un lato o per un vertice.)

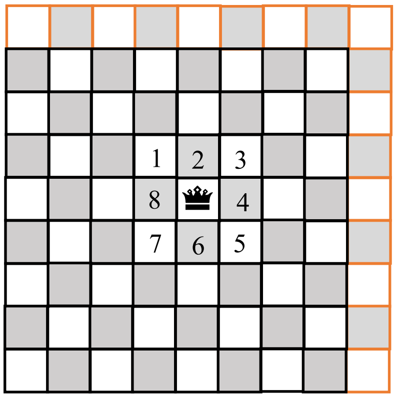
Esercizio 2
Sia ABC un triangolo equilatero. Sul prolungamento di AC dalla parte di C si sceglie un punto E.
Sia D un punto nel semipiano opposto ad A rispetto a BE tale che CDE sia un triangolo equilatero.
Siano poi M ed N rispettivamente i punti medi di AD e BE. Dimostrare che il triangolo CMN è equilatero.

Esercizio 3
Sia n un intero positivo. Dimostrare che il numero di divisori di n che terminano per 1 o per 9 è maggiore o uguale al numero di divisori di n che terminano per 3 o per 7.

Esercizio 4
All'interno di una corona circolare individuata da circonferenze di raggio 1 e raggio r > 1 si dispongono dei punti in modo che la distanza tra una qualsiasi coppia di essi sia almeno 1. Qual è il valore minimo di r che permette di disporne 12? Qual è il valore minimo di r che permette di disporne 18?

Soluzione esercizio 1

Immaginiamo di ingrandire la scacchiera aggiungendo una riga e una colonna in modo che il re occupi la casella centrale di una scacchiera 9×9, come in figura. In quattro mosse il re può raggiungere qualsiasi casella di questa nuova scacchiera e non può uscirne. Se indichiamo, come in figura, con un numero da 1 a 8 le scelte che può fare ad ogni passo, tutti i possibili percorsi possono essere codificati in una quaterna di numeri tra 1 e 8 (quindi 8^4 possibili stringhe/percorsi).
Per capire il colore della casella finale, osserviamo che esso è determinato soltanto dall'ultima mossa e quindi che le prime tre mosse sono libere e per l'ultima si hanno solo 4 scelte. Quindi i percorsi con lo stesso colore delle caselle iniziale e finale, bianco in figura, sono $8^4/2 = 2^{11}$.



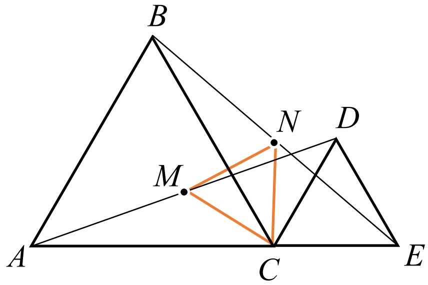
Da questi percorsi dobbiamo eliminare quelli che terminano in una casella bianca fuori dalla scacchiera 8×8 iniziale. I cammini che finiscono nella riga aggiunta sono quelli codificati con quattro numeri presi in {1, 2, 3}, che sono 3^4 quaterne. Di questi, quelli che finiscono in una casella bianca sono codificati da:

- quaterne contenenti nessun 2 (4 scelte libere in {1, 3}, quindi 16 quaterne);
- quaterne contenenti due 2 (6 scelte per la coppia di posizioni con il 2 e due scelte libere in {1, 3}, quindi 24 quaterne);
- quaterne contenenti quattro 2 (un'unica possibilità).

Analogamente, i cammini che arrivano a toccare la colonna aggiunta sono quelli codificati con quattro numeri presi in {3, 4, 5} (3^4 quaterne); quelli che terminano in una casella bianca sono 41 quaterne, ma la quaterna (3, 3, 3, 3), che è l'unica che corrisponde ad un percorso che termina nell'angolo, era già stata contata in precedenza.
Riassumendo, il numero di percorsi diversi che portano il re in una casella dello stesso colore della casella iniziale sono

$$2^{11} - 41 - 41 + 1 = 2048 - 81 = 1967.$$

Soluzione esercizio 2



Osservando la figura a lato, consideriamo il triangolo *ACD* e ruotiamolo di 60° in senso orario intorno al punto *C*. Il punto *A* va in *B* e il punto *D* va in *E*, quindi il triangolo *ACD* va nel triangolo *BCE*. In particolare il punto medio *M* va nel punto medio *N*. Ne segue che nel triangolo *CMN* vale *CM* = *CN* e l'angolo in *C* è di 60°: pertanto è equilatero.

Soluzione esercizio 3

Scomposto il numero *n* in fattori primi avremo qualcosa del tipo

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k},$$

dove i p_i sono numeri primi distinti e gli a_i sono interi positivi. Possiamo allora affermare che ogni divisore di *n* è della forma

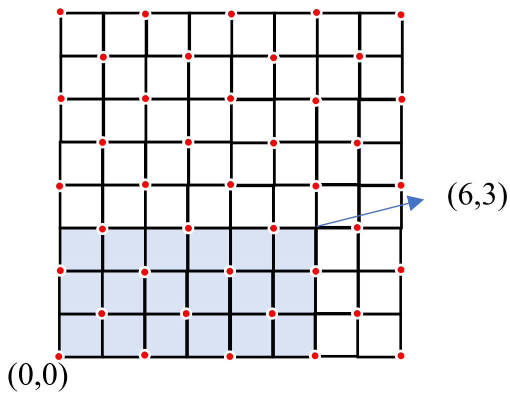
$$p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k},$$

dove $b_i \leq a_i$. Affinché un divisore di *n* abbia come cifra delle unità un elemento di {1, 3, 7, 9} è necessario e sufficiente che non sia pari e non sia un multiplo di 5. Quindi possiamo supporre che i p_i siano diversi da 2 e da 5, cioè che tutti i primi nella scomposizione di *n* abbiano come cifra delle unità un elemento di {1, 3, 7, 9}. Siccome la cifra delle unità di un prodotto dipende unicamente dalle cifre delle unità dei suoi fattori, possiamo riformulare il problema originario nel modo seguente.

Dati quattro numeri interi non negativi *A*, *B*, *C* e *D* consideriamo le quaterne ordinate di numeri interi non negativi (*a*, *b*, *c*, *d*) con $a \leq A, b \leq B, c \leq C$ e $d \leq D$. A ognuna di queste quaterne associamo il numero $f(a,b,c,d)$ definito come la cifra delle unità del numero $1^a 3^b 7^c 9^d$. Vogliamo dimostrare che il numero di quaterne per cui *f* vale 1 o 9 è maggiore del numero di quaterne per cui *f* vale 3 o 7.

Poiché il valore di *a* non influisce sul valore di *f*, possiamo supporre *A* = 0. Siccome ci interessano solo le cifre delle unità, possiamo sostituire il 7 con 3^3 e definire *f* come l'ultima cifra di $3^{b+2d+3c}$. Quindi $f(a,b,c,d)$ vale 1 o 9 se $b + 2d + 3c$ è pari, mentre vale 3 o 7 se $b + 2d + 3c$ è dispari. Pertanto anche il valore di *d* non influisce su *f* e possiamo semplificare il nostro problema nel modo seguente.

Dati due numeri interi non negativi *B* e *C* consideriamo le coppie ordinate di numeri interi non negativi (*b*, *c*) con $b \leq B$ e $c \leq C$. Vogliamo dimostrare che il numero di tali coppie per cui *b* + *c* è pari è maggiore o uguale al numero di coppie per cui *b* + *c* è dispari.



Nella figura a lato vediamo una rappresentazione grafica del caso $B = 6, C = 3$; i punti del reticolo contenuti nel rettangolo evidenziato rappresentano le coppie che ci interessano e quelli colorati in rosso sono quelli la cui somma delle coordinate è pari. Dobbiamo dimostrare che qualunque rettangolo (con lati paralleli agli assi) determinato dai due vertici (0, 0) e (*B*, *C*) contiene almeno $(B + 1)(C + 1)/2$ punti rossi.

Scambiando *B* e *C* il risultato non cambia e quindi possiamo procedere per induzione su *C*. Se *C* = 0, allora i punti che ci interessano sono contenuti in un segmento dell'asse delle ascisse ed ogni punto non rosso è preceduto da un diverso punto rosso; quindi la proposizione vale. Se *C* = 1, allora ogni coppia di punti (*b*, 0) e (*b*, 1) contiene un punto rosso; anche in questo caso la proposizione vale. Supponiamo adesso che la proposizione sia verificata per (B, C) e analizziamo il caso $(B, C + 2)$. Nell'ingrandire il rettangolo abbiamo aggiunto 2*B* + 2 punti e anche in questo caso, per ogni *b*, uno tra i punti (*b*, *C* + 1) e (*b*, *C* + 2) è rosso; quindi la metà dei punti aggiunti è rossa e la proposizione vale per ogni *C*.

Soluzione corta esercizio 3 con congruenze

Sia $n \in \mathbb{N}$. Possiamo scrivere in modo unico $n = 2^a 5^b k$, con $(k, 10) = 1$ e $a, b \geq 0$. Se d divide n, allora $d = 2^\alpha 5^\beta h$ con $h|k$ e $0 \leq \alpha \leq a$, $0 \leq \beta \leq b$. Se $\alpha > 0$ oppure $\beta > 0$ la cifra delle unità di d è pari o è 5. Quindi se indichiamo con $f(n)$ il numero di divisori di *n* che terminano per 1 o 9 e con $g(n)$ il numero di divisori che terminano per 3 o 7, si ha

$$f(n) = f(k) \quad e \quad\; g(n) = g(k).$$

Pertanto è sufficiente dimostrare l'affermazione per gli interi primi con 10. Sia quindi $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ con p_i primi dispari distinti e diversi da 5.

Procediamo per induzione su s. Se $s = 1$, allora $n = p^a$ è la potenza di un primo p:

- se $p = \pm 1\ (mod\ 10)$ allora anche $p^b = \pm 1\ (mod\ 10)$ per ogni b;
- se $p = \pm 3\ (mod\ 10)$ allora $p^{2b} = \pm 1\ (mod\ 10)$ e $p^{2b+1} = \pm 3\ (mod\ 10)$ per ogni b. Se a è dispari allora ci sono tante potenze con esponente pari quante con esponente dispari, cioè $f(p^a) = g(p^a)$. Se a è pari abbiamo una potenza pari in più delle dispari, cioè $f(p^a) = g(p^a) + 1$.

In ogni caso $f(p^a) \geq g(p^a)$. Quindi per $s = 1$ la tesi è dimostrata.

Supponiamo che la tesi sia vera per s fattori primi distinti e dimostriamo che vale anche per $s + 1$ fattori primi. Sia quindi $n = p^a k$, dove k ha s fattori primi distinti. Se $d|n$ allora $d = p^b h$ con $0 \leq b \leq a$ e $h|k$. Poniamo $A = \{d|n : d = \pm 1\ (mod\ 10)\}$, $B = \{d|n : d = \pm 3\ (mod\ 10)\}$ e osserviamo che

$$d \in A \;\; \Leftrightarrow \;\; p^b, h \in A \;\text{ oppure }\; p^b, h \in B$$

$$d \in B \;\; \Leftrightarrow \;\; p^b \in A, h \in B \;\text{ oppure }\; p^b \in B, h \in A$$

Quindi $f(n) = f(p^b)f(h) + g(p^b)g(h)$ e $g(n) = f(p^b)g(h) + g(p^b)f(h)$, da cui ricaviamo

$$f(n) - g(n) = [f(p^b) - g(p^b)][f(h) - g(h)]\,.$$

Poiché entrambi i fattori sono non negativi (per l'ipotesi induttiva e per il caso $s = 1$) è dimostrato che $f(n) \geq g(n)$.

Soluzione esercizio 4

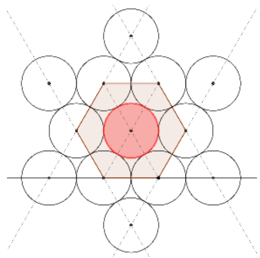


Figura 1

Disporre dei punti a distanza almeno 1 tra loro equivale a disporre dei cerchietti di diametro 1 che non si sovrappongono e con i centri contenuti nella corona circolare considerata, cioè contenuti interamente nella corona circolare di raggi ½ e r + ½ .

Per disporre 12 cerchietti e minimizzare il valore di r appare naturale seguire lo schema riportato in Figura 1. Sei dei dodici centri sono disposti ai vertici di un esagono regolare di lato 1 inscritto nella circonferenza di raggio 1 e gli altri sei ai vertici di un esagono regolare di lato $\sqrt{3}$ inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$. Dimostriamo che non è possibile diminuire il raggio r.

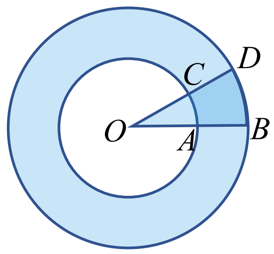


Figura 2

Indichiamo con O il centro della corona circolare e con $C_1, C_2, \dots, C_{12}$ i punti da disporre. Poiché r è minore di 2 le semirette uscenti da O e passanti per uno dei punti C_i sono distinte. Supponiamo di ordinare i punti C_i in senso orario e indichiamo poi con α_i l'angolo $C_i\hat{O}C_{i+1}$ per $i = 1, 2, \dots, 11$ e con α_{12} l'angolo $C_{12}\hat{O}C_1$. Questi dodici angoli non si sovrappongono e la somma delle loro ampiezze è 360°. Pertanto almeno uno (supponiamo sia α_1) è minore o uguale a 30°. Adesso è semplice osservare che, dovunque sia situato C_1 nel segmento CD che gli compete, la distanza C_1C_2 è minore del massimo tra DA e DB (con riferimento alla Figura 2). Ma DB è minore della lunghezza dell'arco DB, che è minore di $\frac{2\pi r}{12} < \frac{2\cdot 3{,}3\sqrt{3}}{12} = \frac{1{,}1\sqrt{3}}{2} < 1$ e DA è minore di 1, perché sarebbe 1 se $DO = \sqrt{3}$ e $D\hat{O}B = 30°$.

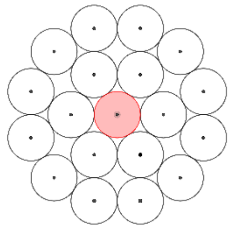


Figura 3

Per disporre 18 punti e minimizzare il valore di r conviene seguire lo schema riportato in Figura 3. Sei dei diciotto centri sono disposti ai vertici di un esagono regolare di lato 1 inscritto nella circonferenza di raggio 1 e gli altri dodici ai vertici di un dodecagono regolare di lato 1 inscritto in una circonferenza di raggio $R = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 2$, ottenibile costruendo un quadrato su ogni lato dell'esagono con i primi sei punti. Dimostriamo che non è possibile scegliere $r < R$.

Come in precedenza, indichiamo con O il centro della corona circolare e con $C_1, C_2, \dots, C_{18}$ i punti da disporre sulle corrispondenti semirette uscenti da O, ordinati in senso orario, e con α_i gli angoli determinati da due semirette consecutive. Dilatando la configurazione con una omotetia di centro O e ragione R/r otteniamo una disposizione di 18 punti con distanza maggiore di 1 tra due punti qualsiasi, all'interno di una corona circolare di raggi 1 e R. Il numero R è caratterizzato dalla seguente proprietà. Un cerchio con centro a distanza 1 da O e raggio 1 interseca la circonferenza di raggio R in due punti che sono estremi di un arco su cui insiste un angolo al centro di 30°. E viceversa, un cerchio con centro a distanza R da O e raggio 1 interseca la circonferenza di raggio 1 in due punti che sono estremi di un arco su cui insiste un angolo al centro di 30°. Se il raggio è R/r anziché 1 allora l'ampiezza dell'arco individuato in entrambi i casi aumenta. Questo significa che ogni angolo α_i è strettamente maggiore di 15°.

Suddividiamo il piano in sei angoli contigui di 60° con vertice in O. Mostriamo che possiamo trovarne uno che contiene almeno quattro dei 18 punti C_i. Immaginiamo infatti che un certo angolo contenga soltanto C_1, C_2, C_3; ruotando con continuità quest'angolo in senso orario vedremo C_1 uscire fuori e C_4 entrare. I due eventi potrebbero accadere insieme (e dunque avremmo un angolo che contiene C_1 e C_4 sui suoi lati), oppure in momenti diversi; in un caso l'angolo conterrebbe quattro dei C_i all'interno, nell'altro ne conterebbe due, forzando gli altri 16 a disporsi tra i restanti 5 angoli e, per il cosiddetto principio dei cassetti o della piccionaia, uno ne conterebbe almeno quattro. Possiamo quindi supporre che C_1 e C_4 si trovino sui lati del nostro angolo di al più 60°, cioè, con riferimento alla Figura 4, che $C_1 \in CD$ e $C_4 \in AB$. Dunque abbiamo sin qui concluso che

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 60° \quad \text{e} \quad 15° < \alpha_i < 30°, \text{ per } i = 1, 2, 3.$$

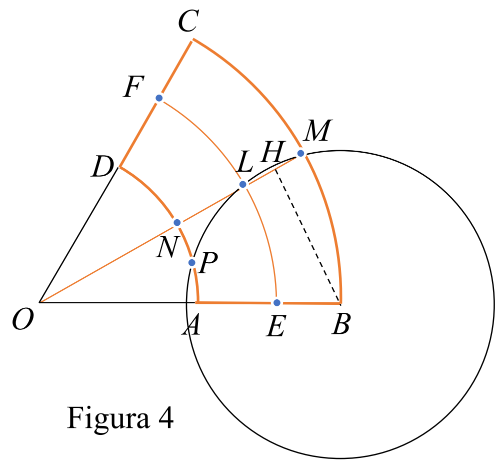


Figura 4

Indichiamo con M il punto medio dell'arco BC e con L l'intersezione tra il segmento OM e l'arco di circonferenza di raggio BM e centro B. Infine tracciamo la circonferenza di centro O passante per L e indichiamo con E ed F le sue intersezioni con AB e CD, rispettivamente. Osserviamo che la regione $MLEB$ (delimitata dai segmenti EB e ML e dagli archi LE e BM) ha diametro 1: infatti, per costruzione abbiamo $EM = BL = BM = 1$. Analogamente, la regione $FLMC$ ha diametro 1.
Se indichiamo con H la proiezione di B sul segmento OM, osservando che OBH è metà triangolo equilatero, ricaviamo che

$$OH = \frac{OB\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$LM = 2HM = 2(OM - OH) = 2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

e quindi $OL = OM - LM = \sqrt{2}$. Ne deduciamo che LA è minore di 1 e quindi che la regione $AELN$ delimitata dai segmenti AE e LN e dagli archi EL e NA ha diametro minore di 1. Analogamente, la regione $NLFD$ ha diametro minore di 1.
Analizziamo adesso le possibili posizioni di C_2 e C_3. Se entrambi avessero distanza da O minore o uguale a $\sqrt{2}$ allora, essendo $\alpha_2 < 30°$, entrambi sarebbero contenuti nella regione $AELN$ o in una sua immagine tramite rotazione intorno a O, contraddicendo quanto visto sul diametro di tale regione. Analogamente, entrambi non possono avere distanza da O maggiore o uguale a $\sqrt{2}$, poiché altrimenti entrambi sarebbero contenuti nella regione $MLEB$ o in una sua immagine tramite rotazione intorno a O.
Pertanto, a meno di scambiarli, possiamo supporre che $C_2 \in FLMC$ e $C_3 \in AELN$. Allora $C_1 \in DF$ e $C_4 \in BE$.
Osserviamo che P, il punto medio dell'arco AN, ha distanza 1 sia da B (già affermato in precedenza essendo $P\hat{O}A = 15°$) che da F: infatti l'angolo $P\hat{O}F$ è di 45°, $PO = 1$ e $OF = \sqrt{2}$ implicano $PF = 1$.
Comunque si scelga C_4 in BE, il cerchio centrato in C_4 di raggio 1 contiene i punti L, P, A, E.
Comunque si scelga C_1 in DF, il cerchio centrato in C_1 di raggio 1 contiene i punti L, N, P.
Quindi C_3 non può avere distanza maggiore di 1 da C_1 e C_4 ed R è il valore ottimale cercato.