



GARA MATEMATICA

Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini"
Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

3 aprile 2023

Esercizio 1

Indicate con a , b , c le radici reali del polinomio $x^3 - x^2 - 4x - 1$,

a) dimostrare che a , b e c sono distinte;

b) dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'espressione $\frac{a^n - b^n}{a - b} + \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a}$ è un numero intero.

Esercizio 2

La somma delle cifre di un intero A è uguale a 2023.

a) Se A è pari, quali sono i valori minimo e massimo della somma delle cifre di $A/2$?

b) Se A è multiplo di 4, quali sono i valori massimo e minimo per la somma delle cifre di $A/4$?

Mostrare degli esempi in cui i valori massimo e minimo della somma delle cifre di $A/2$ e di $A/4$ sono ottenuti.

Esercizio 3

In un bosco in cui gli alberi non sono alti più di 50 metri, gli alberi sono cresciuti in posizioni tali che la distanza tra due alberi non sia più grande del doppio della differenza tra le loro altezze.

Dimostrare che è possibile recintare il bosco con una rete lunga 200 metri.

Esercizio 4

a) Dato un triangolo ABC , indichiamo con O il suo circocentro e con K , L , M i punti medi dei lati AB , BC , CA rispettivamente. Se r ed R sono i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta ad ABC , dimostrare che $OK + OL + OM = R + r$, dove le lunghezze di OK , OL e OM sono orientate, cioè possono anche assumere valori negativi.

b) Siano A_1, A_2, \dots, A_{n+2} i vertici di un $n + 2$ -gono inscritto in una circonferenza. Si consideri una triangolazione di $A_1 A_2 \dots A_{n+2}$ ovvero una partizione del poligono in n triangoli i cui lati coincidono con i lati o con diagonali del poligono che non si intersecano tra loro.

Indicati con r_1, r_2, \dots, r_n i raggi delle circonferenze inscritte agli n triangoli in cui abbiamo suddiviso il poligono. Si dimostri che la somma $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ non dipende dalla particolare triangolazione scelta.